Exercice 1 (3 points) :

On considère dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ les points A(0 , 3 , 1) ; B(-1 , 3 , 0) et C(0 , 5 , 0) et la sphère (S) d'équation : $x^2+y^2+z^2-4x-5=0$

1) a) Montrer que : $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=2\vec{i}-\vec{j}-2\vec{k}$, puis en déduire que les points A , B , C sont alignés
   b) Montrer que : $2x-y-2z+5=0$ est une équation du plan (ABC)
2) a) Montrer que le centre de (S) est le point $\Omega(2 , 0 , 0)$ et que son rayon est R = 3
   b) Montrer que le plan (ABC) est tangent à la sphère (S)
   c) Déterminer les coordonnées du point de tangence H du plan (ABC) et de la sphère (S)

Exercice 2 (3 points) :

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2-z\sqrt{2}+2=0$
2) On considère le nombre complexe : $u=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{6}}{2}$
   a) Montrer que le module du nombre a est : $|u|=\sqrt{2}$ et que : $\arg(u)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$
   b) En utilisant une écriture trigonométrique de u, montrer que u^6 est réel
3) On considère dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{e_1},\vec{e_2})$ les points A et B d'affixes respectives $a=4-4i\sqrt{3}$ et $b=8$
   Soit z l'affixe d'un point M et z' l'affixe du point M' , image du point M par la rotation R de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$
   a) Exprimer z' en fonction de z
   b) Vérifier que B est l'image de A par la rotation R , et en déduire que l triangle OAB est équilatéral

Exercice 3 (3 points) :

On considère la suite numérique (u_n) définie par : $u_0=13$ et $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n+7$

1) Montrer par récurrence que : $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n<14$
2) Soit la suite (v_n) définie par : $\forall n\in\mathbb{N}$, $v_n=14-u_n$
   a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$ puis écrire v_n en onction de n
   b) En déduire que : $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n=14-\left(\frac{1}{2}\right)^n$ puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$
   c) Déterminer le plus petit entier n pour lequel $u_n>13{,}99$

Exercice 4 (3 points) :

Un sac contient 9 jeton indiscernables au toucher, portant les nombres : 0 , 0 , 0 , 0 , 0 , 1 , 1 , 1 , 1

1) On tire au hasard et simultanément 2 jetons du sac. Montrer que : $p(A) = \frac{5}{9}$ où A est l'événement : la somme des nombres portés par les jetons tirés est égale à 1
2) On considère le jeu suivant : Saïd tire simultanément deux jetons de ce suc Saïd est déclaré vainqueur lorsqu'il tire deux jetons portant le nombre 1
   a) Montrer que la probabilité pour que Saïd gagne le jeu est $\frac{1}{6}$
   b) Saïd répète ce jeu 3 fois . (Saïd remet les jetons tirés dans le sac après chaque jeu) Quelle est la probabilité pour que Saïd gagne exactement 2 jeux

Exercice 5 (8 points) :

I. On considère la fonction g définie sur $]0,+\infty[$ par : $g(x) = 1 - \frac{1}{x^2} + \ln(x)$

1) Montrer que : $\forall x \in D_g$, $g'(x) = \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x}$ et que g est tristement croissante sur $]0,+\infty[$
2) Vérifier que g(1) = 0 et que : $\forall x \in]0,1[$, $g(x) \leq 0$ et $\forall x \in [1,+\infty[$, $g(x) \geq 0$

II. On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x) = \frac{1}{x^2} + (1 + \ln(x))^2$

Et on désigne par (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé d'unité graphique 1 cm

1) Montrer que : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ et interpréter graphiquement le résultat
2) a) Calculer : $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$
   b) Montrer que : $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{(1+\ln(x))^2}{x} = 0$ (on pourra poser $= \sqrt{x}$) et montrer que : $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$
   c) Déterminer la nature de la branche infinie de la courbe (C_f) au voisinage de $+\infty$
3) a) Montrer que : $\forall x \in]0,+\infty[$, $f'(x) = \frac{2g(x)}{x}$, puis en déduire que f est décroissante sur $]0,1]$ et croissante sur $[1,+\infty[$
   b) Dresser le tableau de variations de f , puis en déduire que $\forall x \in]0,+\infty[$, $f(x) \geq 2$
4) Tracer dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ la courbe (C_f)
5) On considère les intégrales suivantes : $I = \int_1^e (1 + \ln(x))\, dx$ et $J = \int_1^e (1 + \ln(x))^2\, dx$
   a) Montrer que $x \mapsto x\ln(x)$ est une primitive de la fonction $x \mapsto 1 + \ln(x)$ sur $]0,+\infty[$, et en déduire que $I = e$
   b) En intégrant par parties, montrer que $J = 2e - 1$
   c) Calculer, en cm², l'aire de la partie limité par la courbe (C_f), l'axe des abscisses et les droites d'équations : $x = 1$ et $x = e$